Calcul vectoriel

A. Bourrass et E. Zerouali
SM-SMI
Septembre 2005

Sommaire

Chapitre 1

Calcul vectoriel

Des grandeurs telles que longueur, surface ou masse se laissent décrire complètement par des nombres réels ou scalaires. D'autres, telles que vitesse, accélération ou force nécessitent qu'on pécise en plus de leurs intensité, leur direction et leur sens. Ces grandeurs sont désignées mathématiquement par des objet qu'on appelera "vecteurs".

Notre point de départ pour la construction de ce cours sera la notion de l'espace intuitif que nous assimilerons à l'ensemble des points noté $\mathcal{E}$. On supposera que la notion de longueur d'un segment et celle d'un angle entre deux demi-droites sont connues.

1.1 Notion de vecteur

On appelle vecteur lié, la donnée d'un couple de points (A, B) noté $\overrightarrow{AB}$. La droite (AB) est appelée le support du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Sur l'ensemble des vecteur liés, on définit la relation d'équipolence suivante: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents si les segments de droites $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. L'équipolence est une relation d'équivalence:

- Elle est reflexive : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.
- Elle est symetrique : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
- Elle est transitive : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Une classe d'équivalence pour la relation d'équipollence est appelé vecteur libre. On représente un vecteur libre par les lettres $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et on notera $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs libres de l'espace.

Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur libre et O un point de l'espace intuitif $\mathcal{E}$, il existe un unique point A dans $\mathcal{E}$ tel que la classe d'équipollence de $\overrightarrow{OA}$ soit $\overrightarrow{v}$. Le vecteur lié $\overrightarrow{OA}$ est appelé le représentant de $\overrightarrow{v}$ en O. La droite OA sera appelé le support du vecteur libre $\overrightarrow{v}$.

Remarque 1
- *L'écriture $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que les deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont equipollents.*
- *L'écriture $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ signifie que les symboles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent le même vecteur libre ou encore le même élément de $\mathcal{V}$.*
- *Par abus de langage et d'écriture, on peut écrire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ pour exprimer que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.*

1.1.1 Somme vectorielle

Soient $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ deux vecteurs libres, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ leurs représentants réspectifs en un point O de l'espace. On définit la somme $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ comme étant le vecteur libre $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OS}$ ($\overrightarrow{v}$ de représentant $\overrightarrow{OS}$), où S est le point obtenu par l'une des constructions équivalentes suivantes

- $OASB$ est un parallélogramme.
- S est l'unique point satisfaisant $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{BS}$

Les propriétés suivantes sont faciles a obtenir (géometriquement)

1. Commutativité : $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_1$;
2. Associativité : $(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) + \overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{v}_1 + (\overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3)$;
3. Vecteur nul: On note $\overrightarrow{O} = \overrightarrow{AA}$, appelé le vecteur nul et satisfait $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.
4. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, on écrit $-\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}$ dit vecteur opposé de $\overrightarrow{v}$ et satisfait $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{O}$.

On dit que l'ensemble $\mathcal{V}$ muni de l'addition + est groupe commutatif (ou abélien).

1.1.2 multiplication par un scalaire

Deux vecteurs libres sont dit colinéaires si leurs représentants de même origine ont leurs supports confondus.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ de représentant $\overrightarrow{OA}$. On définit le vecteur $\lambda\overrightarrow{v}$ comme étant le vecteur libre de représentant $\overrightarrow{OB}$ avec B tel que $\overrightarrow{OB}$ de même support que

$\overrightarrow{OA}$ et $OB = |\lambda|OA$ (OA est la longueur du segment $[OA]$) avec $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de même sens si et seulement si $\lambda > 0$.

On a les propriétés suivantes

1. $\lambda(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v} = \mu(\lambda\overrightarrow{v})$
2. $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$;
3. $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{O} \iff \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$;
4. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v}$
5. $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}) + \lambda(\overrightarrow{v})$

L'ensemble des vecteurs libres muni des opérations somme vectorielle et multiplication par un scalaire est un espace vectoriel.

1.2 droites et plans dans l'espace

1.2.1 Droites

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur libre et A un point de l'espace. La droite engendrée par $\overrightarrow{v}$ (ou de direction $\overrightarrow{v}$) est l'ensemble des points de l'espace

$$D_A(\overrightarrow{v}) = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On notera la demi-droite d'extrimité A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ l'ensemble

$$D_A^+(v) = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{v}, \lambda > 0\}$$

Deux droites sont parallèles si elles sont engendrées par le même vecteur. Deux droites parallèles sont ou bien confondues ou bien n'ont aucun point en commun.
La droite passant par les points A et B est engendrée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Définition 1 *Soit $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ deux vecteurs libres. On dira que $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ sont colinéaires s'ils engendrent des droites parallèlles, ou de façon équivalentes, s'il existe α_1 et α_2 non tous nuls tel que*

$$\alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{o}$$

Remarque 2 *Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ sont colinéaires dans les cas suivants:*

1. *L'un au moins des vecteurs est nul.*
2. *Un vecteur est obtenu par la multiplication de l'autre par un scalaire.*

1.2.2 Plans

Définition 2 *Soient $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ deux vecteurs non colinéaires et $A \in \mathcal{E}$. On appelle le plan engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ et passant par le point A, l'ensemble*

$$P_A(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{v}_1 + \mu \overrightarrow{v}_2, \lambda, \mu \in I\!R\}$$

Si A, B, et C sont trois points non alignés, le plan passant par A, B et C est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On dira que trois vecteurs sont coplanaires si leurs représentants issus du même point engendrent le même plan

Propriétés Les propriétés suivantes sont faciles a établir

1. Trois vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$ sont coplanaires si et seulement si, il existe α_1, α_2 et α_3 non tous nuls tel que

$$\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{v}_3 = 0$$

2. Trois vecteurs sont coplanaires si tout les plans engendrés par deux vecteurs d'entres eux non colinéaires sont parallèles.

3. Deux plans sont parallèles s'il sont engendrés par les mêmes vecteurs. En plus deux plans parrallèles sont soit confondues soit ont une intersection vide .

4. Une droite $D(\overrightarrow{v}_1)$ engendrée par $\overrightarrow{v}_1$ et un plan $P(\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ engendré par $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$ sont parallèle si et seulement si $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$ sont coplanaires.

1.3 Projection sur un axe

Définition 3 1. *Soient P un plan et D une droite non parallèle à P. La projection d'un point A sur la droite D parallèlement à P est l'intersection de la droite D et du plan parallèle à P passant par A.*
Cette projection est dite orthogonale si D est P sont perpendiculaires.

2. *La projection d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{A'B'}$ où A' et B' sont les projections de A et B respectivement.*

Propriétés. Soit $p_{D,\pi}$ la projection sur la droite D parallèlement au plan π. L'application

$$p_{D,\pi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

est une application linéaire, c'est à dire

- $p_{D,\pi}(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = p_{D,\pi}(\overrightarrow{v}_1) + p_{D,\pi}(\overrightarrow{v}_2)$ pour tout $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in \mathcal{V}$

- $p_{D,\pi}(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda p_{D,\pi}(\overrightarrow{v})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$.

Proposition 1 *La mesure algébrique de la projection orthogonale sur une droite D d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est obtenue par la formule*

$$\overline{p_{D,\pi}(\overrightarrow{AB})} = \overline{AB}cos(D, \overrightarrow{AB})$$

1.4 Repère cartésien, coordonnées cartesiènnes

Soit $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ trois vecteurs libres non complanaires. Leurs représentants $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en un point O de l'espace forment un triède de sommet O.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur libre et S tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OS}$ (on rappèlle ici que cette égalité signifie que $\overrightarrow{OS}$ est le représentant de $\overrightarrow{v}$ en O). Notons xx', yy' et zz' les droites passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ respectivement. Soient aussi, P, Q et R les projections de S parallèlement aux plan $P_O(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}), P_O(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ et $P_O(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ respectivement sur xx', yy' et zz'.
Les points P, Q, R sont uniques et satisfont

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

Comme P, Q et R appartiennent aux droites $D_O(\overrightarrow{i}), D_O(\overrightarrow{j})$ et $D_O(\overrightarrow{k})$, il existe x, y et z des réels tel que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OQ} = y\overrightarrow{j} \text{ et } \overrightarrow{OR} = z\overrightarrow{k}$$

De sorte que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

On dira que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on ecrira $M(x, y, z)$.

Propriétés : Les vecteurs libres $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ étant fixés, pour tout vecteur libre $\overrightarrow{v}$, les scalaires x, y, z définis ci-dessus sont uniques.

En effet si

$$x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

on aurait $(x' - x)\overrightarrow{i} + (y' - y)\overrightarrow{j} + (z' - z)\overrightarrow{k} = 0$. Cela entrainerait que $x' - x = y' - y = z' - z = 0$ car les trois vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires.

Les scalaires x, y, z associés à vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$ sont appelés les composantes de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ou les coordonnées du points M dans le repère, $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On ecrira pour simplifier $\overrightarrow{v}(x, y, z)$ et $M(x, y, z)$.

Le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ étant donnés, on vient de montrer qu'on peut associer, de manière unique, à tout vecteur libre de $\mathcal{V}$ ou à tout point de l'espace intuitif $\mathcal{E}$, un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. On définit ainsi deux applications

$$\begin{array}{rccll} \Theta_1 : & \mathcal{V} & \to & \mathbb{R}^3 & \\ & \overrightarrow{v} & \to & (x,y,z), & \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \\ \Theta_2 : & \mathcal{E} & \to & \mathbb{R}^3 & \\ & M & \to & (x,y,z), & \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \end{array}$$

De plus Θ_1, Θ_2 sont bijectives et

1. Θ_1 est linéaire, c'est à dire

$$\Theta_1(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \Theta_1(\overrightarrow{v}_1) + \Theta_1(\overrightarrow{v}_2) \quad \text{et} \quad \Theta_1(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\Theta_1(\overrightarrow{v})$$

   pour tout $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Si $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AB} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$, alors $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ et par suite $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x)\overrightarrow{i} + (y' - y)\overrightarrow{j} + (z' - z)\overrightarrow{k}$

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont de même module (on rappelle que le module d'un vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ n'est autre que la longueur du segment $[AB]$), on dit que le repère est normé. Si les vecteurs sont en plus orthogonaux deux à deux, le repère est dit orthonormal.

1.5 Equation cartésiènne d'un plan et d'une droite dans l'espace

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

1.5.1 Equation cartésiènne d'un plan

Soient $\overrightarrow{v}_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{v}_2(a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires, $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $P_A(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ le plan engendré par $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ et passant par A. Un point $M(x, y, z)$ appartient à $P_A(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{v}_1 + \mu\overrightarrow{v}_2.$$

Ce qui se traduit par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - x_0 & = & \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y - y_0 & = & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z - z_0 & = & \lambda c_1 + \mu c_2 \end{array} \right.$$

Trouver l'équation cartésiènne du plan signifie trouver une relation entre x, y et z. Ceci revient à éliminer le paramètres λ et μ des trois équations ci-dessus.

Exemple Si $A(1,1,1), \overrightarrow{v}_1(1,-1,1)$ et $v_2(2,1,1)$. On obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} x-1 & = & \lambda+2\mu & l_1 \\ y-1 & = & -\lambda+\mu & l_2 \\ z-1 & = & \lambda+\mu & l_3 \end{array}\right.$$

on a alors, $l_2+l_3 : y+z-2=2\mu$ et $l_2-l_3 : y-z=-2\lambda$. En reportant dans la première équation on obtient

$$x-1=\frac{y-z}{-2}+y-1+z-1$$

L'équation cartésiènne du plan est alors,

$$2x-y-2z+2=0$$

Remarque De façon générale, l'équation d'un plan est

$$ax+by+cz+d=0$$

où a, b, c et d sont à déterminer.

1.5.2 Equation cartésiènne d'une droite

Soit $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{O}$ de composante (a, b, c), A un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et $D_A(\overrightarrow{v})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$. On a

$$M(x,y,z) \in D_A(\overrightarrow{v}) \iff \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{v}.\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-x_0 & = & \lambda a \\ y-y_0 & = & \lambda b \\ z-z_0 & = & \lambda c \end{array}\right.$$

Puisque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{O}$, l'un au moins des réels a, b, c est non nul. Si par exemple $a \neq 0$, trois cas se présentent.

i) $b=c=0$, le système d'équation se ramène à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0+\lambda a \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ y & = & y_0 \\ z & = & z_0 \end{array}\right.$$

C'est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ qui est aussi l'intersection des plans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$.

ii) $b = 0$ et $c \neq 0$, le système devient

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda a \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 + \lambda c \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} y &= y_0 \\ cx - az - cx_0 + az_0 &= 0 \end{cases}$$

iii) Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on obtient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} =$$

Ce qui donne l'équation suivante de la droite,

$$\begin{cases} b(x - x_0) - a(y - y_0) &= 0 \\ c(x - x_0) - a(z - z_0) &= 0 \end{cases}$$

Exemple $\overrightarrow{v}(1, 2, 1)$, $A(-1, 0, 1)$. On a $M(x, y, z) \in D_A(v) \iff \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{v}$. $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x + 1 &= \lambda \\ y &= 2\lambda \\ z - 1 &= \lambda \end{cases}$$

L'élimination de λ conduit facilement aux équations suivantes

$$\begin{cases} x + z &= 0 \\ 2x - y + 2 &= 0 \end{cases}$$

Ces équations expriment que la droite $D_A(\overrightarrow{v})$ est l'intersection des deux plans $x+z = 0$ et $2x - y + 2 = 0$

De façon general, l'équation cartésiènne d'une droite est

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

où a, b, c, d, a', b', c' et d' sont des constantes données.

1.6 Changement de repère

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère dans l'espace et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs non coplanaires de composante dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}))$ données par $\overrightarrow{u}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\overrightarrow{v}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et $\overrightarrow{w}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. A partir des relations $\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{i} + \beta_1 \overrightarrow{j} + \gamma_1 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \alpha_2 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j} + \gamma_2 \overrightarrow{k}$ et

$\overrightarrow{w} = \alpha_3 \overrightarrow{i} + \beta_3 \overrightarrow{j} + \gamma_3 k$, il est toujours possible d'exprimer $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ dans le nouveau repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ par des relations de type

$$(1) \quad \begin{cases} \overrightarrow{i} &= a_1 \overrightarrow{u} + b_1 \overrightarrow{v} + c_1 \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{j} &= a_2 \overrightarrow{u} + b_2 \overrightarrow{v} + c_2 \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{k} &= a_3 \overrightarrow{u} + b_3 \overrightarrow{v} + c_3 \overrightarrow{w} \end{cases}$$

Problème: Etant donné un vecteur $\overrightarrow{V}$ (ou un point) de composante (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, quelles sont ses composantes (x', y', z') dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. En ecrivant

$$\overrightarrow{V} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k} \quad \text{et } \overrightarrow{V} = x' \overrightarrow{u} + y' \overrightarrow{v} + z' \overrightarrow{w}$$

On obtient

$$\overrightarrow{V} = x(a_1 \overrightarrow{u} + b_1 \overrightarrow{v} + c_1 \overrightarrow{w}) + y(a_2 \overrightarrow{u} + b_2 \overrightarrow{v} + c_2 \overrightarrow{w}) + z(a_3 \overrightarrow{u} + b_3 \overrightarrow{v} + c_3 \overrightarrow{w})$$

c'est à dire puisque les composantes relativement à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont uniques

$$\begin{cases} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 \end{cases}$$

1.7 Interprétation algébrique (ou matricielle)

Le système (1) peut se mettre sous la forme d'un tableau dont les colonnes représentent les composantes des vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ relativement à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

appelé matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ vers la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Le passage des composantes de $\overrightarrow{V}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ vers ses composantes dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ se fait en effectuant le produit de la matrice ci-dessus par la matrice colonne formée par les composantes (x, y, z) de $\overrightarrow{V}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{pmatrix}$$

Exemple: Un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ étant donné, soit $\overrightarrow{V} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{u} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{k}$. En exprimant $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$,

on obtient $\overrightarrow{i} = \sqrt{2}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{j} = \sqrt{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{w}$. Le calcul matriciel donne

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les composantes de $\overrightarrow{V}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont donc $(2\sqrt{2}, 0, 1)$.

1.8 Barycentre

Un système de points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de l'espace $\mathcal{E}$ affectés de coéfficients a_i est appelé système pondéré et est noté: $\{(A_i, a_i)\ ,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Considérons l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ qui a tout point M associe le vecteur $f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$.

Proposition 2 *1. Pour tous points A, B, on a $f(A) = f(B) + (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{AB}$;*

2. si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors f est constante,

3. si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors f est bijective.

Démonstration
1) $f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{AA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_i}) = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{AB} + f(B)$.
2) Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors d'après 1), $f(A) = f(B)$ pour tout, A, B et par suite f est une application constante.
3) Supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, et soit $\overrightarrow{V} \in \mathcal{V}$ et un point O de l'espace. On a $f(M) = \overrightarrow{V}$ si et seulement si, $f(O) + (\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{V}$. En prenant M tel que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}(f(O) - \overrightarrow{V})$, on obtient $\overrightarrow{V} = f(M)$. Ce qui montre que f est surjective.

Montrons que f est aussi injective: On a $f(M) = f(N)$ si et seulement si $(\sum_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{O}$ et puisque $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, on obtient $M = N$.

Corollaire 1 *Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, il existe un point unique G tel que $f(G) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{O}$. Ce point est appelé le barycentre du système pondéré*

$$\{(A_i, a_i)\ ,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Coordonnées du barycentre

L'espace étant rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, soit x_i, y_i, z_i les coordonnées de A_i et x, y, z celles de G. Comme $f(O) = f(G) + (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)\overrightarrow{OG}$, on obtient

$$x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}, \quad y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}, \quad z = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i},$$

Propriétés

- On ne modifie pas le barycentre si on multiplie tout les coéfficients a_i par le même monbre non nul.
- On ne modifie pas le barycentre de n points quand on remplace p de ces points par leurs barycentre affecté d'un coéfficient égal à la somme (supposée non nulle) des coéfficients de ces p points.

1.9 Produit scalaire

Définition 4 *Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ est un nombre réel égal au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment. On note ce nombre $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = v_1 v_2 cos(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$.*

Cette définition peut être formulée autrement. Le produit scalaire $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2$ est le produit du module de $\overrightarrow{v}_1$ par la mesure algèbrique de la projection de $\overrightarrow{v}_2$ sur la droite portée et orientée par le $\overrightarrow{v}_1$. Les vecteurs v_1, v_2 étant permutables dans cette définition.

$$\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = v_1 \overline{proj_{\overrightarrow{v}_1} \overrightarrow{v}_2} = v_2 \overline{proj_{\overrightarrow{v}_2} \overrightarrow{v}_1}$$

Propriétés

1. $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ sont orthogonaux;
2. Le produit scalaire est commutatif :
$$\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = v_1 v_2 cos(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) = v_1 v_2 cos(-(\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1)) = \overrightarrow{v}_2.\overrightarrow{v}_1.$$
3. $(\lambda\overrightarrow{v}_1).\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_1.(\lambda\overrightarrow{v}_2) = \lambda(\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2)$
4. $(\lambda\overrightarrow{v}_1).(\mu\overrightarrow{v}_2) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2$
5. $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}_2$. Ceci découle du fait que, $proj_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = proj_{\overrightarrow{u}}.\overrightarrow{v}_1 + proj_{\overrightarrow{u}}.\overrightarrow{v}_2$

Définition 5 *On appelle norme d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ le nombre réel positif ou nul donné par la formule*

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}}$$

Propriétés

1. Si on note v le module de $\overrightarrow{v}$, on aura $v = \|\overrightarrow{v}\|$;
2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0 \iff \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$;
3. $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$
4. (Inégalité de Schwarz) $|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}'| \leq \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{v}'\|$. En effet
$$|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}'| = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{v}'\|cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}')| \leq \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{v}'\|$$
5. $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}'\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}'\|$. Pour cela remarquons que
$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}'\|^2 &= (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}').(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}') = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}' + \overrightarrow{v}'.\overrightarrow{v}' \\ &= |\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{v}'\|^2 + 2\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}' \\ &\leq |\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{v}'\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{v}'\| \\ &= (\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}'\|)^2 \end{aligned}$$

1.9.1 Expression analytique (ou cartésiènne) du produit scalaire

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Notons (x_i, y_i, z_i) les composantes de $\overrightarrow{v}_i$ dans ce repère. On a

$$\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = (x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}).(x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k})$$

Tenant compte du fait que $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} = 1$ et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} = 0$, on obtient en développant

$$\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Ainsi

1. si $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, on obtient
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
qui représente la norme euclidiènne.
2. $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = 0 \iff x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.
3. L'inégalité de Schwarz devient
$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$
4. L'inégalité triangulaire $\|\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\| \leq \|\overrightarrow{V}_1\| + \|\overrightarrow{V}_2\|$ devient
$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$
cette dernière inégalité est aussi connue sous le nom de l'inégalité de Minkowski.

1.9.2 Applications

1. On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à la droite $D_A(\overrightarrow{v})$ si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. C'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 0$.

2. Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan $P_A(v_1, v_2)$ si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AM}$ avec $M \in P_A(v_1, v_2)$. Cela a lieu si et seulement si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}_1 + \beta\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}_2 = 0$. Ceci est aussi équivalent au fait que $\overrightarrow{n}$ est normal à toute droite incluse dans le plan $P_A(v_1, v_2)$.

3. L'équation cartésiènne d'un plan passant par $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ et normal à un vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est donnée par

$$\begin{aligned} M \in P \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0\ , \quad d = -(ax_0 + by_0 + cz_0) \end{aligned}$$

4. Distance d'un point à un plan.
Soit $\overrightarrow{n}$ normal à un plan P et $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$. Soit H la projection orthogonal de A sur P. La distance de A à P est la longueur AH. Si $M(x, y, z)$ est un point arbitraire du plan, on a $AH = AM|cos\theta|$ où θ est l'angle formé par $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AM}$. Ce qui peut s'écrire $AH = \frac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}|}{\|n\|}$, que l'on peut aussi exprimer analytiquement par

$$AH = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.10 Produit vectoriel

1.10.1 Notion d'orientation

Nous admettrons la notion intuitive de <u>ligne</u>, <u>parcours</u> ou <u>courbe</u>. Lorsqu'on choisit un sens de parcourt entre deux points A vers B sur une courbe (C) limitée par A et B. Le point A est appelé origine et B est dit extrémité de la courbe (C). Lorsque A et B sont confondus, on dit que la courbe (C) est fermée. Orienter une courbe, c'est choisir un sens de parcours.

Une surface bornée (S) est une région de l'espace $\mathcal{E}$ limitée par une courbe fermée. Cette courbe est appelé contour, bord ou frontière de la surface (S). On dira q'une surface bornée est fermée si elle n a pas de bords (ce qui revient à dire aussi que son bord est réduit à un point).

Orienter une surface, c'est choisir un sens à ses vecteurs normaux.

On chosit une sens d'orientation au contour (C) de (S). L'usage veut que le sens de la normal à (S) soit celui de déplacement d'un tire bouchon tournant dans le sens de parcours de (C). (convention dite de Maxwell).

Un volume V est la region de l'espace limité par une surface fermée.

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ les représentants de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On oriente la ligne brisée OAB de O vers B. Si la normale à la portion du surface de contour $OABO$ orienté selon la convention de Maxwell a le même sens que $\overrightarrow{w}$, on dit que le repère $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est direct. Il est indirect dans le cas contraire.

1.10.2 produit vectoriel

Définition 6 *Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres de représentant $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ respectivement. Le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ de représentant $\overrightarrow{OD}$ défini comme suit :*

- *$\overrightarrow{OD}$ est normal au plan $P_O(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*
- *la norme $\|\overrightarrow{OD}\|$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$*
- *son sens est tel que le triède $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit direct.*

Si on pose θ l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ on aura $\|\overrightarrow{OD}\| = OA.OB|sin\theta|$ ou encore

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$$

Propriétés.

1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O} \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$ ou $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$, car $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.
3. $\lambda(\overrightarrow{u}) \wedge (\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v})$ et $(\lambda\overrightarrow{u} \wedge \mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
4. $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{w}$

1.10.3 Expression analytique

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un triède direct orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On a $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$ et par définition

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \text{ et} \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs libres, on a

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} & = & (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) \wedge (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}) \\ & = & (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k} \end{array}.$$

Dans la pratique $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ s'obtient en développant le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Application Le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à un plan $P_A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donné par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Par exemple si $u(1, 0, -1), v(0, 1, 2)$ on aura

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = (1, -2, 1)$$

1.11 produit mixte

1.11.1 Définitions

Définition 7 *On appelle le poruit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ pris dans cet ordre, le nombre algébrique noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ égal au produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

Soit $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ les représentants de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ en un point O. $\overrightarrow{OD}$ le représentant de $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$. Le module $\|\overrightarrow{OD}\|$ de $\overrightarrow{OD}$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$. Et on a

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OD}\| = OA.ODcos\theta$$

Comme $OAcos\theta$ est égal à la hauteur AH du parallélépède construit sur $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, le produit mixte est donc égal en valeur absolue au volume de ce parallélépède. Le signe du produit mixte est celui de $cos\theta$. Il est positif si l'angle est aigu, c'est à dire que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont du même coté du plan $P_O(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et il est négatif si l'angle est obtu, ou encore que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas du même coté du plan $P_O(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. En d'autre termes $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est positif si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est direct et négatif sinon.

1.11.2 Propriétés

$i)$ Puisque le parallélépipède construit sur les arêtes OA, OB, OC est indépendant de l'ordre dans lequel on considère ces arêtes, la valeur absolue du produit mixte, ne change pas si on change l'ordre des vecteur, par contre le signe du produit mixte peut changer si l'on construit le triède dans un certain ordre indirect. Si on permute deux vecteurs, le produit mixte change de signe.

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$$

Si on permute circulairement les trois vecteurs le triède garde le même sens. On a donc

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$$

L'ecriture signifie

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$$

ii) Le produit mixte est linéaire par rapport a chacun des vecteurs. On a par exemple

$$(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$$
$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w})$$
$$(\lambda\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$$

iii) Trois vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ non nul sont coplanaires si et seulement leurs produit mixte est nul. En effet $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = 0 \iff \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) = 0$, donc $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w} = 0$ ou bien $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux. Or $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w} = 0$ signifie que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires et dans ce cas $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sont coplanaires. D'autre part si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux, le représentant $\overrightarrow{OA}$ de $\overrightarrow{u}$ en un point O est dans le plan $P_O(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et donc $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

1.11.3 Expression analytique

On rapporte l'espace à un repère orthonormé direct. Soit $\overrightarrow{u}(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ et $\overrightarrow{w}(x",y",z")$ trois vecteurs libres. Les composantes du produit mixte $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ sont $(y'z" - y"z', z'x" - x'z", x'y" - x"y')$. Donc

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) = x(y'z" - y"z') + y(z'x" - x'z") + z(x'y" - x"y')$$

Cette expréssion représente le déterminant des "composantes " relativement au repère choisi

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x" & y" & z" \end{vmatrix}$$

1.11.4 Applications

1) Donner une relation entre α,β et γ pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{u}(\alpha,1,0)$, $\overrightarrow{v}(-1,\beta,1)$ et $\overrightarrow{w}(1,-1,\gamma)$ ne soient pas coplanaires. Calculons le produit mixte

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \beta & 1 \\ 1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma + 1$$

la condition est donc $\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma + 1 \neq 0$.
2) Donner l'équation cartésiènne du plan $P_A(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, avec $A(1,0,0)$, $\overrightarrow{u}(1,-2,1)$ et $\overrightarrow{v}(-1,1,2)$.
On a $M \in P_A(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \iff \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}) = 0$. Donc

$$M \in P_A(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \iff \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5(x-1) - 3y - z = 0$$

L'équation du plan $P_A(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est donc $5x + 3y + z - 5 = 0$.

Chapitre 2

Coniques et quadriques

2.1 Coniques

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On appelle conique les courbes de " deuxième ordre " définies par une equation du second degré de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{2.1}$$

où les coéfficients A, B et C ne sont pas simultanément nuls.

Proposition 3 *Il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation* (2.1) *prend l'une des formes canoniques suivantes:*

- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ *(ellipse),* $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ *(ellipse imaginaire);*
- $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ *(hyperbole),* $Y^2 = 2pX$ *(parabole)*
- $a^2X^2 - b^2Y^2 = 0$ *(droites sécantes);* $Y^2 - a^2 = 0$ *(Droites parallèlles),*
- $a^2X^2 + b^2Y^2 = 0$ *(droites sécantes imaginaires),* $Y^2 + a^2 = 0$ *(Droites imaginaires parallèlles)*

Preuve: On procède en deux étapes

Etape 1: On suprimme le terme xy en faisant une rotation d'angle θ du repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ autour de l'origine O. Le nouveau repère $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ vérifie donc

$$\overrightarrow{u} = cos\theta\overrightarrow{i} + sin\theta\overrightarrow{j} \quad \overrightarrow{v} = -sin\theta\overrightarrow{i} + cos\theta\overrightarrow{j}$$

Ce qui donne

$$x = Xcos\theta - Ysin\theta \ \ , \ y = Xsin\theta + Ycos\theta.$$

Ainsi l'équation (2.1) devient

$$A(Xcos\theta - Ysin\theta)^2 + 2B(Xcos\theta - Ysin\theta)(Xsin\theta + Ycos\theta) + C(Xsin\theta + Ycos\theta)^2$$
$$+2D(Xcos\theta - Ysin\theta) + 2E(Xsin\theta + Ycos\theta) + F = 0$$

Le coéfficient de XY dans cette nouvelle équation est :

$$-2Asin\theta cos\theta + 2B(cos^2\theta - sin^2\theta) + 2Csin\theta cos\theta$$

qui est nul si et seulement si $2Bcos2\theta = (A - C)sin2\theta$. Donc

- Si $A = C$ on prend $\theta = \frac{\pi}{4}$;
- Si $A \neq C$, on a $tg2\theta = \frac{2B}{A-C}$

L'angle étant choisi, l'équation(2.1) devient

$$A'X^2 + C'Y^2 + 2D'X + 2E'Y + F' = 0 \qquad (2.2)$$

Etape 2: On éffectue une translation de l'origine en O' pour faire disparaitre les coéficients D' et E'. Ceci se fera en complétant des identités remarquables de sorte à ce que l'équation (2.2) s'écrive

$$A'(X - X_0)^2 + C'(Y - Y_0)^2 + F" = 0 \qquad (2.3)$$

Ceci est possible si A' et C' sont non nuls. Les cas A' ou B' nul, complètent le schéma établit dans la proposition.

Exemples: Donner les équations canoniques des coniques suivantes:
1)$\frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 4 = 0$.
2)$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})x + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})y + \frac{1}{16} = 0$.

1) Puisque $A = C$, on choisit $\theta = \frac{\pi}{4}$, et par suite $x = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce qui donne

$\frac{5}{2}(X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 3(X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2})(X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{5}{2}(X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 6\sqrt{2}(X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2}) - 6\sqrt{2}(X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}) + 4 = 0$, soit $4X^2 + Y^2 - 12X + 4 = 0$

Ceci est équivalent à $4(X - \frac{3}{2})^2 + Y^2 - 5 = 0$. En éffectuant la translasion en $O'(\frac{3}{2}, 0)$, on obtient l'équation $4X'^2 + Y'^2 - 5 = 0$ que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\frac{X'^2}{\frac{5}{4}} + \frac{Y'^2}{5} = 1,$$

et qui correspond à l'équation d'une éllipse.

2) On a $tg2\theta = \frac{2B}{A-C} = -\sqrt{3}$ et donc $\theta = \frac{\pi}{3}$. D'où $x = \frac{1}{2}(X - \sqrt{3}Y)$ et $y = \frac{1}{2}(X + \sqrt{3}Y)$. On trouve en remplaçant

$$4X^2 + 2X + 4Y + \frac{1}{4} = 0.$$

Ce qui donne $4(X+\frac{1}{4})^2+4Y=0$ et après la translation $X'=X+\frac{1}{4}$ et $Y'=Y$, on aboutit à

$$Y=-X^2.$$

C'est une parabole.

2.2 Définition géométrique des coniques

2.2.1 Ellipse

Soit F_1, F_2 deux points du plan et $a>0$. L'ensemble des points M du plan tels que $MF_1+MF_2=2a$ est une ellipse de foyers F_1 et F_2.

Choisissons un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i}$ soit porté par la droite (F_1, F_2) et O le milieu du segment F_1F_2. Dans ce repère on a $F_1(-c,0)$ et $F_2(c,0)$ pour un certain $c>0$. La condition $MF_1+MF_2=2a$ devient alors

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

ou encore $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. En élevant au carré on obtient

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ce qui donne $xc=a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ et par suite $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$. En élevant encore une fois au carré, on obtient

$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2-2axc=a^4-2a^2xc+c^2x^2.$$

Soit en posant $b^2=a^2-c^2$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2.2.2 Hyperbole

Soit F_1, F_2 deux points du plan et $a>0$. L'hyperbole de foyers F_1 et F_2 est l'ensemble des points M du plan tels que $MF_1-MF_2=2a$. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i}$ soit porté par la droite (F_1, F_2) et O le milieu de F_1F_2, on aura $F_1(-c,0)$ et $F_2(c,0)$ avec $c>0$. La condition $MF_1-MF_2=2a$ est alors équivalente à

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

et par suite $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. En élevant au carré on aura

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

C'est à dire $a^2 + xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ et en élevant encore une fois au carré $a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 = a^4 + c^2x^2$ ce qui donne

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

et finalement avec $b^2 = c^2 - a^2$, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2.2.3 Parabole

Soit D une droite et $F \notin D$. La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M qui sont à égale distance de la droite D et du foyer F.

On choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $F = F(0, c)$ et appartient à l'axe qui porte $\overrightarrow{j}$ et tel que la droite D a pour équation $y = -c$. Un point $M(x, y)$ sur la parobole satisfait $x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$ ce qui donne

$$x^2 = 4cy$$

2.3 Quadriques

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à repère orthonormé. On appelle quadriques, les surfaces du "deuxième" ordre définies par une équation de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J == \tag{2.4}$$

Les coéfficients A, B, C, D ne sont pas tous nul.

Proposition 4 *Il existe (sous certaines conditions) un repère orthonormé dans lequel l'équation* (2.4) *se réduit à l'une des formes suivantes*

- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ *(ellipsoide);*
- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ *(hyperboloide à une nappe),*
- $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$ *(hyperboloide à deux nappes),*
- $z^2 = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ *(cône elliptique)*
- $z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ *(paraboloide elliptique)*
- $z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ *(paraboloide hyperbolique)*

On peut décrire partiellement ces surfaces en opérant des sections parallèlement aux plans définies par le triède $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

2.3.1 Ellipsoide

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

En coupant avec le plan $z = k$, on voit que l'intersection est vide si $k > c$. D'un autre coté si $k < c$, la trace est une ellipse d'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

De même, puisque l'équation est symetrique en x, y, z, la trace sur les plans $x = k$ et $y = k$ est soit vide, soit une ellipse.

2.3.2 Paraboloide elliptique

$$z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$$

Si on examine la section par le plan $z = k > 0$, on obtient l'ellipse

$$\frac{X^2}{ka^2} + \frac{Y^2}{kb^2} = 1$$

dans le plan $z = k$.

Par contre si on coupe avec le plan $x = k$ ou $y = k$, on obtient une parabole.

2.3.3 Hyperboloide à une nappe

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

La trace avec le plan $z = k, k \in \mathbf{R}$ est une ellipse et les traces sur les plans $x = k$ ou $y = k$ sont des hyperboles.

2.3.4 Hyperboloide à deux nappes

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

Si on coupe avec le plan $z = k$ avec $|k| < |c|$, il n y a pas de trace. Si $|k| > |c|$, on obtient l'ellipsoide

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

Les traces sur les plans $x = k$ ou $y = k$ sont des hyperboles.

2.3.5 Paraboloide hyperbolique

$$z = \frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2}$$

La trace sur le plan $z = 0$ est formée de deux droites sécantes et la trace sur le plan $z = k \neq 0$ est l'hyperbole $k = \frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2}$. La trace sur les plans $y = \alpha$ (ou $x = \beta$) est une parabole $z = \frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2}$ (ou $z = \frac{Y^2}{b^2} - \frac{\beta^2}{a^2}$)

2.3.6 Cône elliplique

$$z^2 = \frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2}$$

Si on coupe avec le plan $z = k$, la trace est une ellipse $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = k^2$. La trace dans les plan $x = 0$ et $y = 0$ sont les paires de droites $z = | \pm \frac{1}{b}|y$ et $z = | \pm \frac{1}{a}|x$.

Les traces dans les plans $x = \alpha \neq 0$ et $y = \beta \neq 0$ sont les hyperboles

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 \text{ et } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a'^2}$$

Chapitre 3

Fonctions vectorielles

3.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Courbes paramétriques

Définition 8 *Une fonction vectorielle $\overrightarrow{V}$ d'une variable réelle t est une application $\overrightarrow{V} : I \to \mathcal{V}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.*

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'objet $\overrightarrow{V}(t)$ est donc un vecteur libre. Soient $(x(t), y(t), z(t))$ ses composantes dans un repère orthonormé. On définit la fonction $F : I \to \mathbb{R}^3$ par $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Inversement tout fonction $F : I \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$, avec ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 des fonctions de I dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir une fonction véctorielle $\overrightarrow{V} : I \to \mathcal{V}$)par $\overrightarrow{V}(t)$ est le vecteur de composantes $(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$.

Ainsi on désignera indifférement, et de façon tout a fait équivalente, la fonction vectorielle F ou $\overrightarrow{V}$ qui est aussi appelé un champs de vecteurs.

Définition 9 *Soit $F(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle $I \subset R$. L'ensemble*

$$\mathcal{C} = \{(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) \ , \ t \in I\}$$

est appelé une courbe parametrée dans R^3 et définie par la fonction vectorielle F. Les équations $x = \phi_1(t), y = \phi_2(t)$ et $z = \phi_3(t)$ constituent les repésentations paramétriques de la courbe $\mathcal{C}$.

On définit de même les fonctions vectorielles à valeurs dans R^2, $F : I \to R^2$ ainsi que les courbes paramétrées planes (contenues dans le plan R^2).

Exercice 1 *1) Donner les domaines de définition ainsi que quelques points des courbes:*

- $\overrightarrow{V}(t) = (4cost, 3sint)$, *courbe plane*

- $\overrightarrow{V}(t) = (4cost, 3sint, t)$

2) Pour chacune des deux courbes précédentes, déterminer les coordonnées des points correspondant à $t = 0 + 2k\pi$
3) Trouver la valeur de t *corespondant aux points* $M(0,3)$ *et* $M_k(0, 3\frac{\pi}{4} + k\pi)$ *dans les deux courbes précédentes respectivement.*

3.1.1 Equations paramétriques d'une droite

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{V}(a,b,c)$ un vecteur libre. Rappelons que la droite $D_A(\overrightarrow{V})$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient l'équation vectorielle $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V}, t \in R$. Cette équation est équivalente au système d'équations appelé équations paramétriques de la droite:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

La fonction vectorielle définissant la droite est alors $\overrightarrow{V}(t) = (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$.

Exercice 2 *1) Donner les équations paramétriques de la droite passant par les points* $A(1, -2, 4)$ *et* $B(0, 3, 2)$.
Les points $C(2, -7, 6)$ *et* $(1, 0, 1)$ *appartiennent-ils à cette droite?*

2) Donner les équations cartésiènnes de la droite

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$

3.1.2 Equations paramétriques d'un plan

Soient $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, $\overrightarrow{V_1}(a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{V_2}(a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Un point $M \in P_A(V_1, V_2)$ si et seulement si l'equation vectorielle suivante est satisfaite

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{V_1} + t_2\overrightarrow{V_2}.$$

Cette équation constitue une représentation paramétrique du plan et peut s'écrire:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t_1 + a_2t_2 \\ y = y_0 + b_1t_1 + b_2t_2 \\ z = z_0 + c_1t_1 + c_2t_2 \end{cases}$$

Exercice 3 *1) Donner l'équation paramétrique dans le plan et dans l'espace du cercle et de la sphère de centre O et de rayon 1. Donner aussi l'équation paramétrique dans le plan et dans l'espace du cercle et de la sphère de centre $A(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon $r \neq 0$.*
2) Donner l'equation cartésiènne du plan

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + s \\ y = t + 2s - 1 \\ z = 3t - s + 2 \end{cases}$$

Définition 10 *Soit $\overrightarrow{V}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)), \quad (t \in I)$ une fonction vectorielle, l_1, l_2, l_3 des nombres réels et $\overrightarrow{V} = (l_1, l_2, l_3)$.*

- *On dira que $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{V}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} \phi_i(t) = l_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*
- *La fonction $\overrightarrow{V}(t)$ est continue en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{V}(t_0)$.*

Propriétés Soit $F_i(t) = \overrightarrow{V}_i(t)$ trois fonctions vectorielles et $\lambda(t)$ une fonction numérique. On suppose que $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{V}_i(t) = \overrightarrow{V}_i(t_0)$ pour $i = 1, 2, 3$ et que $\lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t) = \lambda(t_0)$. Alors

a) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overrightarrow{V}_1(t) + \overrightarrow{V}_2(t)) = \overrightarrow{V}_1(t_0) + \overrightarrow{V}_2(t_0)$

b) $\lim\limits_{t \to t_0} \lambda(t)\overrightarrow{V}_i(t) = \lambda(t_0)\overrightarrow{V}_i(t_0)$

c) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overrightarrow{V}_1(t)\overrightarrow{V}_2(t)) = \overrightarrow{V}_1(t_0)\overrightarrow{V}_2(t_0)$

d) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overrightarrow{V}_1(t) \wedge \overrightarrow{V}_2(t)) = \overrightarrow{V}_1(t_0) \wedge \overrightarrow{V}_2(t_0)$

e) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overrightarrow{V}_1(t), \overrightarrow{V}_2(t), \overrightarrow{V}_3(t)) = (\overrightarrow{V}_1(t_0), \overrightarrow{V}_2(t_0), \overrightarrow{V}_3(t_0))$

Les démonstrations se font en opérant sur les fonctions coordonnées. Effectuons les calculs pour la preuve de $d)$ à titre indicatif. Si $\overrightarrow{V}_1(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ et $\overrightarrow{V}_2(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ on a

$$\overrightarrow{V}_1(t) \wedge \overrightarrow{V}_2(t) = (\phi_2(t)\psi_3(t) - \phi_3(t)\psi_1(t), \phi_3(t)\psi_1(t) - \phi_1(t)\psi_3(t), \phi_1(t)\psi_2(t) - \phi_2(t)\psi_1(t))$$

Comme par hypothèse $\lim\limits_{t \to t_0} \phi_i(t)\psi_j(t) = \phi_i(t_0)\psi_j(t_0)$ pour tout $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$. On en déduit le résultat $\lim\limits_{t \to t_0} (\overrightarrow{V}_1(t) \wedge \overrightarrow{V}_2(t)) = \overrightarrow{V}_1(t_0) \wedge \overrightarrow{V}_2(t_0)$.

Définition 11 *On dira que la fonction vectorielle $F(t) = \overrightarrow{V}(t)$ est dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{V}(t) - \overrightarrow{V}(t_0)}{t - t_0}$ existe et on note $F'(t_0)$ ou $\overrightarrow{V}'(t_0)$ cette limite. On note aussi $\frac{dF}{dt}(t_0)$*

et $\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}(t_0)$ *la dérivée de* F *et* $\overrightarrow{V}$ *en* t_0.

Si la fonction $\overrightarrow{V}$ *est dérivable en tout point de* I, *la fonction dérivée* $\overrightarrow{V}'$ *est une fonction vectorielle. Si* $\overrightarrow{V}'$ *est aussi dérivable sur* I, *alors sa dérivée est appelé la dérivée seconde de* $\overrightarrow{V}$ *qu'on note* $\overrightarrow{V}"$.
On définit de même les vecteurs (ou fonctions vectorielles) dérivées succéssives $\overrightarrow{V}^{(k)}(t) = \overrightarrow{V'}^{(k-1)}(t)$.

3.1.3 Différentielle

A partir de la notation $\overrightarrow{V}'(t) = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}(t)$, on peut écrire formellement $d\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{V}'(t)dt$. Cette nouvelle fonction vectorielle est appelé la différentielle de $\overrightarrow{V}(t)$.

Proposition 5 *La fonction vectorielle* $F(t) = \overrightarrow{V}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ *est dérivable en* t_0 *si et seulement si les fonctions numériques* $\phi_i(t)$ *sont dérivables en* t_0. *Dans ce cas on a*

$$F'(t) = \overrightarrow{V}'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t))$$

Remarque: Un vecteur $\overrightarrow{V}(t)$ qui dépend du paramètre t (ou la fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(t)$) est de norme constante si la fonction numérique $t \to \|\overrightarrow{V}(t)\|$ est constante. La fonction $t \to \overrightarrow{V}(t)$ n'est pas nécessairement constante. La fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(t)$ est constante si la norme et la direction de $\overrightarrow{V}(t)$ sont constants tout les deux.

Corollaire 2 *Pour que* $\overrightarrow{V}(t)$ *soit constante sur* I, *il faut et il suffit que* $\overrightarrow{V}'(t) = \overrightarrow{0}$.

En éffet $\overrightarrow{V}'(t) = \overrightarrow{V}'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)) = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\phi_i'(t) = 0$ pour tout t et donc $\phi_i(t) = a_i$ sont des constantes réelles pour $i = 1, 2, 3$. Ce qui est équivalent à $\overrightarrow{V}(t) = (a_1, a_2, a_3)$ constant.

Propriétés Soit $\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t)$, $\overrightarrow{w}(t)$ trois fonctions vectorielles et $\lambda(t)$ une fonction numérique définies et dérivables sur un intervalle I. Alors

1. $(\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t))' = \overrightarrow{u}'(t) + \overrightarrow{v}'(t)$;

2. $(\lambda(t)\overrightarrow{u}(t))' = \lambda'(t)\overrightarrow{u}(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}'(t)$;

3. $(\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{v}(t))' = \overrightarrow{u}'(t).\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{v}'(t)$;

4. $(\overrightarrow{u}(t) \wedge \overrightarrow{v}(t))' = \overrightarrow{u}'(t) \wedge \overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{u}(t) \wedge \overrightarrow{v}'(t)$;

5. $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{w}(t))' = (\overrightarrow{u}'(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{w}(t)) + (\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}'(t), \overrightarrow{w}(t)) + (\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{w}'(t))$.

Démonstration.

1) Est évident.

2) Il faut évaluer le rapport $R(h) = \frac{\lambda(t+h)\overrightarrow{u}(t+h)-\lambda(t)\overrightarrow{u}(t)}{h}$.
On écrit

$$R(h) = \frac{(\lambda(t+h)-\lambda(t))\overrightarrow{u}(t+h)}{h} + -\frac{\lambda(t)(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t))}{h},$$

et en passant à la limite on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} R(h) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(\lambda(t+h)-\lambda(t))}{h} \lim_{h\to 0} \overrightarrow{u}(t+h) + \frac{\lambda(t)\lim_{h\to 0}(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t))}{h} \\ &= \lambda'(t)\overrightarrow{u}(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}'(t)\end{aligned}$$

3) Produit scalaire: On écrit de la même manière que dans 2)

$$\frac{\overrightarrow{u}(t+h).\overrightarrow{v}(t+h)-\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{v}(t)}{h} = \frac{(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t)).\overrightarrow{v}(t+h)}{h} + -\frac{\overrightarrow{u}(t).(\overrightarrow{v}(t+h)-\overrightarrow{v}(t)}{h}$$

puis on passe à la limite $h \to 0$ pour avoir le résultat demandé.
4) Le produit vectoriel se traite de la même manière en prenant soin de bien écrire les vecteurs dans le bon ordre.
5) Produit mixte: C'est toujours le même rapport à évaluer, mais cette fois l'expression sera un peu plus longue

$$\begin{aligned}R(h) &= \tfrac{(\overrightarrow{u}(t+h),\overrightarrow{v}(t+h),\overrightarrow{w}(t+h))-(\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t))}{h} \\ &= \tfrac{(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t))}{h} + \tfrac{(\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t+h)-\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t))}{h} + \tfrac{(\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t+h)-\overrightarrow{w}(t))}{h} \\ &+ \tfrac{(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t+h)-\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t))}{h} + \tfrac{(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t+h)-\overrightarrow{w}(t))}{h} \\ &+ \tfrac{(\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t+h)-\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t+h)-\overrightarrow{w}(t))}{h} + \tfrac{(\overrightarrow{u}(t+h)-\overrightarrow{u}(t),\overrightarrow{v}(t+h)-\overrightarrow{v}(t),\overrightarrow{w}(t+h)-\overrightarrow{w}(t))}{h}\end{aligned}$$

Lorsque $h \to 0$, les limites réspectives des trois premiers termes dans la quantité précédente sont $\overrightarrow{u}'(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{w}(t)), (\overrightarrow{u}(t)\ , \overrightarrow{v}'(t), \overrightarrow{w}(t))$ et $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{w}'(t))$. Les trois derniers termes tendent vers 0 puisque

$$\lim_{t\to 0} \overrightarrow{u}(t+h) - \overrightarrow{u}(t) = \lim_{t\to 0} \overrightarrow{v}(t+h) - \overrightarrow{v}(t) = \lim_{t\to 0} \overrightarrow{w}(t+h) - \overrightarrow{w}(t) = 0.$$

Exercice 4 *Retrouver le résultat de 5) en utilisant la formule du produit mixte*

$$(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t), \overrightarrow{w}(t)) = \overrightarrow{u}(t).(\overrightarrow{v}(t) \wedge \overrightarrow{w}(t))$$

Corollaire 3 *Soit $\overrightarrow{u}(t)$ une fonction vectorielle dérivable. Alors*

$$\|\overrightarrow{u}(t)\|' = \frac{\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{u}'(t)}{\|\overrightarrow{u}(t)\|}$$

pour tout t, tel que $\|\overrightarrow{u}(t)\| \neq 0$. Par conséquent $\|\overrightarrow{u}(t)\|$ est constante si et seulement si $\overrightarrow{u}(t)$ et $\overrightarrow{u}'(t)$ sont orthogonaux.

Démonstration. D'après la dérivée du produit scalaire on a $(\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{u}(t))' = 2\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{u}'(t)$ et puisque $(\|\overrightarrow{u}(t)\|^2)' = 2\|\overrightarrow{u}(t)\|'\|\overrightarrow{u}(t)\|$, on déduit $\|\overrightarrow{u}(t)\|' = \frac{\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{u}'(t)}{\|\overrightarrow{u}(t)\|}$
Maintenant $\|\overrightarrow{u}(t)\|$ est constante si seulement si $\|\overrightarrow{u}(t)\|' = 0$, ce qui est équivalent à $\overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{u}'(t) = 0$

3.1.4 Changement de paramètre

Soit $u : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ et $\overrightarrow{V} : s \to [a, b] \to \overrightarrow{V}(s)$ une fonction vectorielle. On suppose que u et $\overrightarrow{V}$ sont dérivables et que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$. Alors les fonctions vectorielles $\overrightarrow{V}(s)$ et $\overrightarrow{W}(t) = \overrightarrow{V}(u(s))$ définissent la même courbe et on a

$$\frac{d\overrightarrow{W}}{dt} = \overrightarrow{W}'(t) = \overrightarrow{V}'(s)u'(t) = \frac{d\overrightarrow{V}(s)}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Définition 12 *Une courbe $\mathcal{C}$ définie par une fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{F}(t)$ est de classe $C^k, k \geq 1$ si la fonction $\overrightarrow{V}(t)$ est de classe C^k sur I. Cela revient à dire que les fonctions coordonnées ϕ_i, $i = 1, 2, 3$ sont de classe C^k dans I.*

Théorème 1 *(Formule de Taylor) Si la fonction $\overrightarrow{V}(t)$ est de classe C^n sur un intervalle $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, elle admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de t_0. C'est à dire qu'il existe une fonction vectorielle $\overrightarrow{\epsilon}(t)$ tel que $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{\epsilon}(t) = \overrightarrow{0}$ et pour tout $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ on a*

$$\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{V}(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{V}'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\overrightarrow{V}"(t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^n}{n!}\overrightarrow{V}^{(n)}(t_0) + (t - t_0)^n\overrightarrow{\epsilon}(t)$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\overrightarrow{V}(t_0 + h) = \overrightarrow{V}(t_0) + h\overrightarrow{V}'(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{V}"(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\overrightarrow{V}^{(n)}(t_0) + h^n\overrightarrow{\epsilon}(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \overrightarrow{\epsilon}(h) = \overrightarrow{0}$

Définition 13 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe dans l'espace définie sur I par la fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ et $t_0 \in I$.*

1. *Si $\overrightarrow{V}'(t_0)$ existe et est non nul, (on dit dans ce cas que $M(t_0)(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \phi_3(t_0))$ est un point ordinaire), la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$ est la droite $D_{M(t_0)}(\overrightarrow{V}'(t_0))$.*

2. *Si $\overrightarrow{V}'(t_0) = \overrightarrow{0}$, (dans ce cas $M(t_0)$ est dit un point singulier ou stationnaire), la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ est la droite $D_{M(t_0)}(\overrightarrow{V}^{(k)}(t_0))$, où $k > 1$ est le plus petit entier tel que $\overrightarrow{V}'(t_0) = \overrightarrow{V}"(t_0) = \cdots = \overrightarrow{V}^{(k-1)}(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V}^{(k)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.*

Exemple 1 *Déterminer les points stationnaires de la courbe définie par* $\overrightarrow{V}(t) = (\frac{2}{3}t^3, -t^2, t^2)$ *et écrire les équations des tangentes aux points* $M(0)$ *et* $M(1)$*.*

On a $\overrightarrow{V}'(t) = (2t^2, -2t, 2t)$*. Le seul point stationnaire correspond à* $t = 0$*. En plus* $\overrightarrow{V}"(0) = (0, -2, 2) \neq \overrightarrow{0}$*, donc la tangente est* $D_{(0,0,0)}(0, -2, 2)$ *et dont les équations paramétriques et cartésiènnes sont respectivement*

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -2t \\ z(t) = 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

C'est une droite contenue dans le plan orthogonale à l'axe des abscisses.

Pour le point $M(1)$*, on a* $\overrightarrow{V}'(1) = (2, -2, 2) \neq \overrightarrow{0}$*. Un vecteur directeur de la tangente en* $M(1) = (\frac{2}{3}, -1, 1)$ *est* $(1, -1, 1)$*et les équations paramétriques et les équations cartésiènnes de la tangente sont:*

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{2}{3} \\ y(t) = -t - 1 \\ z(t) = t + 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + \frac{1}{3} = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

3.1.5 Plan osculateur

Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie par la fonction vectorielle $\overrightarrow{V}(t)$ admettant une tangente en $M(t_0)$. On appelle plan tangent à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ tout plan contenant la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$. Une courbe admet ainsi une infinité de tangente en un point. On appelle normale à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ toute droite orthogonale en $M(t_0)$ à la tangente à $\mathcal{C}$. Il existe donc une infinité de normale à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ qui sont toute contenues dans le même plan dit plan normal à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ (il est unique). Ce plan est le plan osculateur à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$.

$\diamondsuit$ Si $\overrightarrow{V}'(t_0)$ et $\overrightarrow{V}"(t_0)$ ne sont pas colinéaires, le plan osculateur à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ est le plan $P_{M(t_0)}(\overrightarrow{V}'(t_0), \overrightarrow{V}"(t_0))$

$\diamondsuit$ Si $\overrightarrow{V}'(t_0)$ et $\overrightarrow{V}"(t_0)$ sont colinéaires, le plan osculateur à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ est le plan $P_{M(t_0)}(\overrightarrow{V}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{V}^{(q)}(t_0))$ où p est le plus petit entier tel qu'il exsite $q > p$ minimal aussi vérifiant $(\overrightarrow{V}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{V}^{(q)}(t_0))$ non colinéaires.

Exercice 5 *Déterminer la tangente et le plan osculateur à la courbe* $\overrightarrow{V}(t) = (4cost, 3sint, \frac{t}{2})$ *au point* $\frac{2\pi}{3}$*.*

3.2 Fonctions vectorielles de deux variables réelles-Surfaces paramétrées

3.2.1 Fonction numériques de plusieurs variables

Une fonction numérique de deux variables réelles et une application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \in D \to f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Une fonction numérique de 3 variables réelles est une application f définie sur une partie T de $\mathbb{R}^3$ à valeurs de $\mathbb{R}$: $(x, y, z) \in T \to f(x, y, z) \in \mathbb{R}$

Exemples:

$$f(x, y) = xsiny + x^2y$$
$$f(x, y, z) = x^2yz^3 + zlog(x).$$

Rappelons que le graphe d'une fonction numérique $f : I \to \mathbb{R}$ est la courbe plane $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x) = y,\ x \in I\}$.
Si $f : D \to \mathbb{R}^2$ avec $D \subset \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables x, y, le graphe de f est la partie de $D \times \mathbb{R}$ définie par

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ z = f(x, y)\}$$

En général, lorsque les variables x, y sont indépendantes, l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, z) \in Gr(f)$ est une surface.

Définition 14 *Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables définie sur un produit d'intervalles $I \times J \times K$. L'ensemble des point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ est appelé surface dans $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $f(x, y, z) = c$.*

Remarque Si g est une fonction de deux variables x, y, l'ensmble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = g(x, y)$ est la surface définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$ où $f(x, y, z) = z - g(x, y)$.

3.2.2 Dérivées partielles

Soit $f : I \times J \times K \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables. Fixons $(y_0, z_0) \in J \times K$ et considérons la fonction $f_1 : x \in I \to f(x, y_0, z_0)$. Si la fonction f_1 est dérivable au point x_0. la dérivée $f_1'(x_0)$ est appelé la dérivée partielle de f en (x_0, y_0, z_0). Cette dérivée est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$. On a donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_1'(x_0)$.

On définе de même les dérivées partielles de f par rapport à y et z, en fixant (x_0, z_0) et (x_0, y_0) qu'on note respectivement $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Exemple 2 *Calculer les dérivées partielles des fonctions* $f(x,y) = xsiny + x^2y$ *et* $f(x,y,z) = xyz + zlog(x+y)$.

3.2.3 Représentation paramétrique d'une surface

Soit $\overrightarrow{F} : I \times J \to \mathcal{V}$ une fonction vectorielle de deux variables réeles indépendantes u, v (qu'on appelera aussi paramètres). Si ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont les fonctions coordonées de $\overrightarrow{F}$, c'est à dire $\overrightarrow{F}(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$, l'extrimité M du vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u,v)$ décrit généralement une surface (S) dont les équations paramétriques sont

$$x = \phi_1(u,v),\ \ y = \phi_2(u,v)\ \ \text{ et } z = \phi_3(u,v).$$

L'équation cartésiènne de cette surface s'obtient en éliminant u, v des 3 relations ci-dessus.

3.2.4 Plan tangent à une surface

1) Soit $\overrightarrow{F}(u,v)$ une représentation paramétrique d'une surface (S). Fixons le paramètre $v = v_0$ et faisant varier u. On obtient une fonction vectorielle d'une seule variable $\overrightarrow{F}(u,v_0) = \overrightarrow{V}(u)$. L'ensemble des points $M(u)$ tel que $\overrightarrow{OM}(u) = \overrightarrow{F}(u,v_0)$ décrit une courbe située sur la surface (S) de représentation paramétrique $\overrightarrow{F}(u,v_0)$. Le vecteur directeur de la tangente en $M(u_0,v_0)$ est le vecteur $\overrightarrow{V}'(u) = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0)$.

De même si on fixe $u = u_0$, et on fait varier v, on obtient une autre courbe située sur (S) qui passe par le point $M(u_0,v_0)$ tel que $\overrightarrow{OM}(u_0,v_0) = \overrightarrow{F}(u_0,v_0)$. Le vecteur directeur de la tangent à cette courbe en $M(u_0,v_0)$ est $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)$.

Supposons maintenant, plus généralement que u et v sont des fonction d'un même paramètre t. La fonction vectorielle de la variable t, $\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{F}(u(t),v(t))$ est une représentation paramétrique d'une courbe située sur la surface (S). Si t_0 est tel que $u_0 = u(t_0)$ et $v_0 = v(t_0)$, la tangente à cette courbe au point $M(u_0,v_0)$ admet pour vecteur directeur

$$\overrightarrow{V}'(t) = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0)u'(t_0) + \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)v'(t_0)$$

Si les vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0)$ ne sont pas colinéaires, on voit alors que la tangente se trouve dans le plan $P_{M(u_0,v_0)}(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0))$. Il est clair que ce plan ne dépend pas du paramètre t et donc ne dépend pas de la courbe incluse dans (S) et passant par $M(u_0,v_0)$. Ainsi toute les tangente en $M(u_0,v_0)$ se trouve dans le même plan $P_{M(u_0,v_0)}(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0))$.

Définition 15 *Le plan* $P_{M(u_0,v_0)}(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0,v_0))$ *est appelé plan tangent à la surface* (S) *au point* $M(u_0,v_0)$. *On appelle vecteur normal à* (S) *en* $M(u_0,v_0)$*, le*

vecteur normal au plan tangent à (S) en $M(u_0, v_0)$. C'est le vecteur $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0)$

Rappelons que si $\overrightarrow{F}(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$, alors
$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0) = (\frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u_0, v_0)$
$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0) = (\frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u_0, v_0)$
Exemple: Soit la surface paramétrée (S) donnée par $\overrightarrow{F}(u, v) = (u^2v, uv^2, u + v)$. On a $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u, v) = (2uv, v^2, 1)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u, v) = (u^2, 2uv, 1)$. Le vecteur normal à (S) en (u_0, v_0) est

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0) = (v_0^2 - 2u_0v_0, u_0^2 - 2u_0v_0, 3u_0^2v_0^2)$$

Au point $M(1, 2)$, la normale à (S) est donc le vecteur $\overrightarrow{n}(0, -3, 12)$.

Cas d'une surface définie par son équation cartésiènne

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation cartésiènne d'une surface (S). Une courbe $(\mathcal{C})$ d'équations paramétriques $x = \phi_1(t), y = \phi_2(t)$ et $z = \phi_3(t)$ est contenue dans (S) si et seulement si $F(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = 0$ pour tout t. En dérivant par rapport á t, on a:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\phi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\phi_2'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}\phi_3'(t) = 0 \qquad (3.1)$$

Cette relation exprime que les vecteurs de composantes $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ et $(\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t))$ sont orthogonaux. Mais le vecteur de composantes $(\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t))$ est tangent à la courbe $(\mathcal{C})$. Comme la courbe $(\mathcal{C})$ est prise arbitraire dans (S), la relation 3.1 signifie en fait que le vecteur $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ est normal au plan tangent.

Proposition 6 *Soit une surface (S) d'équation cartésiènne $F(x, y, z) = 0$. on appelle gradient de F qu'on note grad($\overrightarrow{F}$) ou $\overrightarrow{\nabla F}$ le vecteur $\overrightarrow{\nabla F} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$. Le vecteur $\overrightarrow{\nabla F}(x_0, y_0, z_0)$ est normal à la surface (S) au point $M(x_0, y_0, z_0)$.*

Lorsque la surface (S) est définie par une équation de la forme $z = f(x, y)$, on se ramène au cas précédent en posant $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Dans ce cas un vecteur normal est $\overrightarrow{\nabla F} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$.

Exemple 3 *1) Donner l'équation cartésiènne du plan tangent aux surfaces*
1) $(S_1) : \overrightarrow{F}(u, v) = (u^2v, uv^2, u + v)$ au point $M_0(1, 2)$
2) $(S_2) : F(x, y, z) = 0 \ / \ F(x, y, z) = x^2yz^2 + zlogx$ au point $M_0(1, 1, 1)$.
1) La normale à (S_1) est $M_0(1, 2)$ a été calculée ci-dessus, $\overrightarrow{n}(0, -1, 12)$. L'équation du plan tangent s'obtient en exprimant le fait que $\overrightarrow{MM}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ pour tout $M(x, y, z)$. Comme $\overrightarrow{MM}_0(x, y + 1, z - 12)$, le plan tangent a pour équation $-y - 1 + 12z - 144 = 0$ ou encore $y - 12z + 145 = 0$.

2) Le vecteur normal à (S_2) *est* $\overrightarrow{\nabla F} = (\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial x}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial y}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial y})$. *On a* $\overrightarrow{\nabla F} = (2xyz^2 + \frac{z}{x}, x^2y^2, Logx)$ *et* $\overrightarrow{\nabla F}(1,1,1) = (3,1,0)$. *Un point* $M(x,y,z)$ *appartient au plan tangent à* (S_2) *en* $M_0(1,1,1)$ *si et seulement si* $\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{\nabla F}(1,1,1) = 0$, *et le plan tangent a pour équation* $3x + y - 4 = 0$.

3.3 Courbure et torsion d'une courbe

Soit $(\mathcal{C})$ une courbe de classe C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$ par $\overrightarrow{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Le vecteur tangent en un point courant de $(\mathcal{C})$ est $\overrightarrow{F'}(t)$. En cinématique, la courbe $(\mathcal{C})$ représente une trajectoire en fonction du paramètre t (le temps) et le vecteur tangent $\overrightarrow{F'}(t)$ correspond à la vitesse du mobile à l'instant t. Si la norme du vecteur vitesse est constante entre les instants t_1 et t_2, la distance parcourue (ou en d'autre termes la longueur de la portion du courbe) entre $M(t_1)$ et $M(t_2)$ est

$$M(t_1)M(t_2) = \|\overrightarrow{F'}(t)\|(t_2 - t_1).$$

Plus généralement si $\|\overrightarrow{F'}(t)\| = v_i$ entre t_i et t_{i+1}, la longueur de la distance parcourue entre les point $M(t_0)$ et $M(t_n)$ est égale à

$$M(t_0)M(t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \triangle t_i \quad \text{où} \quad \triangle t_i = t_{i+1} - t_i.$$

Cette formule se généralise lorsque $\overrightarrow{F}'(t)$ varie avec t

Proposition 7 *La longueur de la portion de courbe située entre* $M(t_0)$ *et* $M(t_1)$ *est égale à*

$$M(t_0)M(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{F'}(t)\| dt.$$

Définition 16 *Soit* $(\mathcal{C})$ *une courbe définie sur un intervalle* $[a,b]$ *par* $\overrightarrow{F}(t)$. *Une orientation étant choisie sur* $(\mathcal{C})$, *on appelle abscisse curviligne* $s(t)$ *d'un point* $M(t)$ *de* $(\mathcal{C})$ *le nombre réel*

$$s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{F'}(u)\| du.$$

Remarques

1. La longueur de la courbe $(\mathcal{C})$ est

$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{F'}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

2. On a $\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\overrightarrow{F'}(t)\|$ et $ds = \|\overrightarrow{F'}(t)\| dt$
   $ds^2 = \overrightarrow{F'}(t).\overrightarrow{F'}(t) = [x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]dt^2$

Supposons que $\|\overrightarrow{F'}(t)\| > 0$ sur $[a,b]$ et posons $\alpha = \int_a^b \|\overrightarrow{F'}(t)\|dt$. Alors l'application $s : [a,b] \to [0,\alpha]$ définie par $s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{F'}(u)\|du$ est une bijection. La fonction vectorielle $\overrightarrow{G}$ définie sur $[0,\alpha]$ par $\overrightarrow{G}(u) = \overrightarrow{F}(s^{-1}(u)$ définie la même courbe que $\overrightarrow{F}$, car $\overrightarrow{G}(u) = \overrightarrow{F}(t)$, pour $s(t) = u$.

On a $\overrightarrow{F'}(t) = \overrightarrow{G'}(s(t))s'(t)$, d'où

$$\overrightarrow{G'}(s) = \frac{\overrightarrow{F'}(t)}{s'(t)} = \frac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$$

et par conséquent $\|\overrightarrow{G'}(s)\| = 1$. Le vecteur $\overrightarrow{\tau}(s) = \overrightarrow{G'}(s) = \frac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$ est appelé vecteur tangent unitaire à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(s)$.

Comme $\|\overrightarrow{\tau}(s)\| = 1$, les vecteurs $\overrightarrow{\tau'}(s)$ et $\overrightarrow{\tau}(s)$ sont orthogonaux et le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{\tau'}(t)}{\|\overrightarrow{\tau'}(t)\|}$ est appelé normale principale unitaire au point $M(s)$

Définition 17 *La courbure en un point $M = M(s)$ d'une courbe $(\mathcal{C})$ est le nombre réel*

$$c(s) = \|\overrightarrow{\tau}'(s)\|$$

Le rayon de courbure est donné par $R(s) = \frac{1}{c(s)}$ et le centre de courbure est l'unique point I satisfaisant $\overrightarrow{MI} = R(s)\overrightarrow{n}(s)$.

Caluclpratique: Le plus souvent, la courbe $(\mathcal{C})$ est définie par son équation vectorielle de paramètre t différent de l'abscisse curviligne. Soit $\overrightarrow{F}(t)$ une représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$. L'égalité $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$ implique

$$\overrightarrow{F'}(t) = \|\overrightarrow{F'}(t)\|\overrightarrow{\tau}(t) = s'(t)\overrightarrow{\tau}(t)$$

et

$$\overrightarrow{F"}(t) = s"(t)\overrightarrow{\tau}(t) + s'(t)\overrightarrow{\tau'}(t)s'(t) = s"(t)\overrightarrow{\tau}(t) + (s'(t))^2\overrightarrow{\tau'}(t)$$

Comme $\overrightarrow{\tau'}(t) = \|\overrightarrow{\tau'}(t)\|\overrightarrow{n}(t) = c(t)\overrightarrow{n}(t)$, il vient que
$\overrightarrow{F"}(t) = s"(t)\overrightarrow{\tau}(t) + (s'(t))^2 c(t)\overrightarrow{n}(t)$ et par suite $\overrightarrow{F'}(t) \wedge \overrightarrow{F"}(t) = (s'(t))^3 c(t)\overrightarrow{\tau}(t) \wedge \overrightarrow{n}(t)$. En utilisant le fait que $\|\overrightarrow{\tau}(t) \wedge \overrightarrow{n}(t)\| = 1$ et $s'(t) = \|\overrightarrow{F'}(t)\|$, on obtient la formule de la courbure en $M(t)$ par

$$c(t) = \frac{\|\overrightarrow{F'}(t) \wedge \overrightarrow{F"}(t)\|}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$$

3.3.1 Triède de Frénet

En un point $M(t)$ d'une courbe $\mathcal{C}$) définie par $\overrightarrow{F}(t)$. Le vecteur tangent unitaire est $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{\overrightarrow{F}'(t)}{\|\overrightarrow{F}'(t)\|}$ est le vecteur normal principal unitaire est $\overrightarrow{n}(t) = \frac{\overrightarrow{\tau}'(t)}{\|\overrightarrow{\tau}'(t)\|}$. Le vecteur $\overrightarrow{\beta}(t) = \overrightarrow{\tau}(t) \wedge \overrightarrow{n}(t)$ est appelé le veteur binormal à $(\mathcal{C})$ en $M(t)$. On a $\|\overrightarrow{\tau}(t)\| = \|\overrightarrow{n}(t)\| = \|\overrightarrow{\beta}(t)\| = 1$. Ces trois vecteurs définissent un triède direct $(M(t), \overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{n}(t), \overrightarrow{\beta}(t))$ en tout point $M(t)$ de $(\mathcal{C})$. Ce triède est appelé Triede de Frénet.

Remarque Le plan osculateur à $(\mathcal{C})$ en $M(t)$ est le plan $P_{M(t)}(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{n}(t))$.

3.3.2 Torsion d'une courbe gauche

Par définition du vecteur binormal, $\overrightarrow{\beta}(t) = \overrightarrow{\tau}(t) \wedge \overrightarrow{n}(t)$ on a $\|\beta(t)\| = 1$ et $\overrightarrow{\beta}(t).\overrightarrow{\tau}(t) = 0$. En dérivant ces deux égalités on a $\overrightarrow{\beta}(t).\overrightarrow{\beta}'(t) = 0$ et $\overrightarrow{\beta}(t).\overrightarrow{\tau}'(t) + \overrightarrow{\tau}(t).\overrightarrow{\beta}'(t) = 0$. Comme $\overrightarrow{\beta}(t)$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}(t)$ et $\overrightarrow{n}(t)$ est colineaire à $\overrightarrow{\tau}'(t)$, on a $\overrightarrow{\tau}'(t).\overrightarrow{\beta}(t) = 0$. Il en résulte en définitive que $\overrightarrow{\tau}(t).\overrightarrow{\beta}'(t) = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{\beta}'(t)$ étant orthogonal à $\overrightarrow{\tau}(t)$ et à $\overrightarrow{\beta}(t)$ est nécessairement colinéaire à $\overrightarrow{n}(t)$, puisque $(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\beta}(t), \overrightarrow{n}(t))$ forment un triède orthonormé. Il existe donc un nombre $\theta(t)$ tel que $\overrightarrow{\beta}'(t) = \theta(t)\overrightarrow{n}(t)$

Définition 18 *La torsion d'une courbe $(\mathcal{C})$ en un point courant $M(t)$ est le scalaire $\theta(t)$ défini par*

$$\overrightarrow{\beta}'(t) = \theta(t)\overrightarrow{n}(t).$$

Si $\overrightarrow{F}(t)$ est une repésentation paramétrique de la courbe, on montre que la torsion est donnée par la formule

$$\theta(t) = \frac{(\overrightarrow{F}'(t), \overrightarrow{F}''(t), \overrightarrow{F}'''(t))}{\|\overrightarrow{F}'(t) \wedge \overrightarrow{F}''(t)\|^2}$$

Remarque: La torsion mesure à quel point une courbe est tordue. Ainsi comme le montre la formule, une courbe qui se trouve dans un plan a une torsion nulle. On peut aussi le voir autrement. Le vecteur $\overrightarrow{\beta}(t)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\tau}(t)$ et $\overrightarrow{n}(t)$, donc $\overrightarrow{\beta}(t)$ est orthogonal au plan de la courbe et par suite il garde une direction (dans le cas ou la courbe se trouve dans un plan constant). Comme en plus il est de norme 1, on déduit que $\overrightarrow{\beta}'(t) = 0$ et par suite la torsion est nulle.

3.3.3 Formules de Frénet

Ces formules donnent les relations entre les vecteurs $\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\beta}$, la courbure et la torsion. Les deux premières formules déja étabies sont

$$\overrightarrow{\tau}'(t) = c(t)\overrightarrow{n}(t) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\beta}'(t) = \theta(t)\overrightarrow{n}(t)$$

En suite, comme $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\beta})$ forment un trièdre orthonormé, on a $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\beta} \wedge \overrightarrow{\tau}$ et en dérivant on obtient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n'}(t) &= \overrightarrow{\beta'}(t) \wedge \overrightarrow{\tau}(t) + \overrightarrow{\beta}(t) \wedge \overrightarrow{\tau'}(t) \\ &= -\theta(t)\overrightarrow{n}(t) \wedge \overrightarrow{\tau}(t) + c(t)\overrightarrow{\beta}(t) \wedge \overrightarrow{n}(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne la troisième formule de Frénet

$$\overrightarrow{n'}(t) = \theta(t)\overrightarrow{n}(t) + c(t)\overrightarrow{\tau}(t)$$